

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

线性代数笔记14——行空间和左零空间

前面已经介绍了矩阵的零空间和列空间，它们都属于矩阵的四个基本子空间，基本子空间还包括行空间和左零空间。

召唤一个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

为了找出零空间和列空间，先进行套路运算——转换为行最简阶梯矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

只有一个主元，也就是仅有一个向量都是独立向量，列空间是：

$$C(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$

这同时也意味着矩阵A的秩是1。矩阵的秩、列空间的基的向量数、独立向量数、主元数，这些都是一个意思，只是用于不同场景中，这些概念往往容易让人混淆。实际上直到今天，我仍然会对一些概念产生一瞬间或几分钟的困惑，不得不重新翻阅资料。

再来看零空间，主元可以用另外两个自由元表示，这里用 x_2 和 x_3 表示 x_1 ：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= 0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{2} + \frac{3x_3}{2} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{x_2}{2} + \frac{3x_3}{2} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 \end{aligned}$$

A的零空间：

$$N(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

左零空间

零空间关注的是 $Ax = 0$ 的解，除此之外，我们还关注转置后的A形成的方程的性质，也就是 $A^T x = 0$ 的解。还是刚才的矩阵，看看A转置后的零空间：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T x = 0$$

套路运算，行最简阶梯型矩阵：

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第二列可以用第一列表示，第二列是第一列的线性组合，只有一个独立向量，只有一个主元，秩是1.....一大堆相似概念，最终可以得到这样的方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

A^T 的零空间：

$$N(A^T) = span\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

独立地看， A^T 的零空间是 $A^T x = 0$ 的解，这又有什么用呢？它与 $Ax = 0$ 有什么关系？

$$A^T x = 0$$

如果把等式两边同时转置，右侧依然是趴下的零向量，左侧：

$$(A^T x)^T = x^T (A^T)^T = x^T A$$

这下清晰了， A 的零空间是将 A 右乘 x ；如果左乘 x 就是 A^T 的零空间：

$$x^T A = 0^T$$

由于 x 在 A 的左侧，所以 A^T 的零空间也叫 A 的左零空间。

行空间

A 的行空间也就是 A^T 的列空间， A 的秩是在回答 A 中有多少列是线性无关的， A^T 是在回答 A 中有多少行是线性无关的。有趣的是， A 的秩和 A^T 的秩相等。理解这里一点很有用，尤其是在确定列空间的基时，辅助行空间可以帮助我们避免一些陷阱，比如下面这个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

三列是否是线性无关的？如果最有一个列向量是 $\langle 3, 3, 7 \rangle$ ，那么很明显第三个向量可以由前两个向量代替，现在第三个向量稍稍偏移了一点，所以三个向量应该是线性无关的。真是这样吗？

实际上我们不必去计算， A 的列向量之间的关系没那么明显，但是行向量则不然——前两个行向量相同， A 中只有两个线性无关的行向量，也就是 A 的秩是2，所以 A 的列向量也不是独立向量。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

空间和维数

前面已经多次出现过维度的概念，如果有一个 $A_{m \times n}$ 矩阵，它的四个基本子空间的维数各是多少呢？

只要清楚四个基本子空间的概念，这个问题就比较容易回答。列空间的一组基一定包含A的一个列向量，这个列向量是m维的，所以列空间一定在 R^m 中；同理，行空间在 R^n 中。具体来说，由于秩是r，所以列空间是 R^m 中的r维子空间，行空间是 R^n 中的r维子空间。

零空间是 $Ax = 0$ 中x的解，x是n维向量，所以零空间在 R^n 中；同理，左零空间在 R^m 中。零空间的维数是由自由元决定的，自由元等于矩阵列数减去主元个数，也就是 $n - r$ ，所以零空间是n维空间内的 $n - r$ 维子空间。左零空间是m维空间内的 $m - r$ 维子空间。

总结一下：

列空间，位于 R^m 下的r维空间

行空间，位于 R^n 下的r维空间

零空间，位于 R^n 下的 $n - r$ 维空间

左零空间，位于 R^m 下的 $m - r$ 维子空间

行空间的基

可以先对矩阵转置，在通过列空间的方式寻找行空间的基。这样做没错，但多少有些无聊，我们更希望一次就能同时找到列空间和行空间的基。看个例子：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

A的列空间和行空间都比较容易确定，甚至不需要化简：

$$N(A) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \quad R(A) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

虽然列空间和行空间的独立向量个数相等，但列空间和行空间可不行等，所以还是需要某种通用的方法。仍然是先将A化简为行最简阶梯形矩阵：

$$A \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R是A的行最简阶梯矩阵，通过R可以确认A的秩 $r = 2$ 。下面是关键：对于A来说，行空间的基是R的前r行，即：

$$R(A) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

之所以能够得到这样的结论，是因为从A到R的变换本来就是通过行的线性变换得到的，变换到最后，R中只留下了线性无关的行向量。这实际是在说，R是最简行阶梯矩阵，R中的每一级阶梯都是线性无关的。

左零空间的基

召唤一个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

直接的方法是使用左零空间的定义，将A转置，然后求解 A^T 的零空间：

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

这和求解零空间一样，化简为行最简阶梯形矩阵：

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_1$$

$$N(A^T) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

这就是A的左零空间。这样计算简单粗暴。

另外一种方法是使用高斯-诺当消元法，通过记录行变换的方式找到左零空间。这种方法的大概思路是和求逆矩阵类似，其过程是使 $[A_{m \times n} \quad I_{m \times m}] \rightarrow [R_{m \times n} \quad E_{m \times m}]$ ，如果A是方阵，R是单位矩阵，则转化过程和求逆一致。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{21}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{12}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R, E} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

E实际上是记录了从A到R的初等行变换， $EA = R$ 。如果用《[线性代数9——消元矩阵与置换矩阵](#)》中的方法写出来，其过程如下：

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_A \xrightarrow[\text{(-1,1,0)}]{\text{(1,0,0)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} \Rightarrow E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} \xrightarrow[\text{(0,0,1)}]{\text{(0,-1,0)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3} \Rightarrow E_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3} \xrightarrow[\text{(0,0,1)}]{\text{(1,-2,0)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_R \Rightarrow E_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

最终的消元矩阵:

$$\begin{aligned}
 E &= E_{12}E_{22}E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 EA &= R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

费了很大劲求出E, 目的是为了得到A的左零空间, R的最后一行是 O^T , 也就是说E的最后一行与A的乘积是 O^T :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{E的最后一行}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{O^T}$$

这相当于:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^T A &= \mathbf{O}^T \\
 \mathbf{x}^T &= [-1 \quad 0 \quad 1]
 \end{aligned}$$

现在可以确定, A的左零空间是:

$$\text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

这个方法的思路是寻找一个零行向量 O^T 的行组合。

作者: 我是8位的

出处: <http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [线性代数](#)

标签: [基本子空间](#), [左零空间](#), [行空间](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)

[我是8位的](#)
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

0
[推荐](#)

0
[反对](#)

« 上一篇: [线性代数笔记13——Ax=b的通解](#)
» 下一篇: [线性代数笔记15——矩阵空间和秩1矩阵](#)

posted on 2018-09-25 21:52 [我是8位的](#) 阅读(5129) 评论(0) [编辑](#) [收藏](#) [举报](#)

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

WebForms升级到ASP.NET Core

fineui.com

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日~3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补

- 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

[博客园](#)

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes